Lídia Queiroz*

A estrutura axiomática do *De continuo* de Tomás Bradwardine e a demonstração em Aristóteles e Euclides

Abstract The *De continuo*, by the English philosopher of the fourteenth century Thomas Bradwardine, from Oxford University, represents the polemic discussions about the possibility of an indivisibilist structure of the mathematical and physical continua, in the first half of the fourteenth century. The text is a multidisciplinary treatise but clearly of a mathematical nature, adopting the Euclid's *Elements* structure and many of its propositions. In it, Bradwardine intends to construct a definitive refutation of all atomistic theories conceived since Antiquity, releasing the divisibilist doctrine of Aristotelian-scholastic tradition of discussions.
Key-words: Definitions; suppositions; conclusions.

Authors: Aristotle; Euclid; Thomas Bradwardine.

Tomás Bradwardine (*doctor profundus*) foi um dos maiores mestres do século XIV. Ele é conhecido por ser um dos representantes dos chamados «Calculatores» de Oxford, isto é, um grupo de lógicos, matemáticos e físicos da primeira metade do século XIV, a maioria deles provindo do Merton College, que procuravam aplicar o cálculo lógico-matemático na resolução de problemas da filosofia natural (e que inclui nomes como Ricardo Swynshead, Guilherme Heytesbury,

* Doutoranda em Filosofia da Faculdade de Letras da Universidade do Porto, Via Panorâmica s/n, Porto, Portugal; liqueiroz@sapo.pt

Rogério Swynshead, João Dumbleton e Ricardo Kilvington)[1]. Por causa dessa metodologia, receberam a designação de «Calculadores[2]».

Bradwardine foi um lógico, matemático, filósofo e teólogo da primeira metade do século XIV. A produção literária deste autor compreende, então, tratados de lógica, matemática e teologia[3]. O *De continuo* é um dos seus textos matemáticos[4] e pensa-se que terá sido escrito entre 1328 a 1335. O período compreendido neste horizonte temporal é balizado por duas datas: 1328 é o ano da composição do *Tractatus de proportionibus* (texto citado por Bradwardine no *De continuo*, como sendo a obra *De proportionibus velocitatum in motibus*; logo, o *De continuo* não lhe pode ser anterior, portanto, ou também foi escrito em 1328 ou num ano posterior a este) alargando-se o leque de possibilidades até aproximadamente 1335 (com base num dado menos objectivo do que o anterior mas igualmente indicativo: a partir dessa altura os interesses especulativos de Bradwardine conhecem uma viragem)[5]. Não se pode assegurar, com um grau de certeza, que tal

1 Sendo Ricardo Swineshead, autor do *Liber calculationum*, conhecido simplesmente por «Calculator». Note-se que os medievalistas deixaram de designar o grupo dos «Calculadores» por «Mertonianos». William Courtenay, por exemplo, coloca em causa que Kilvington tenha sido um membro do Merton College (in *Schools & Scholars in Fourteenth-Century England*, Princeton University Press, New Jersey 1987, p. 244) e nem todos os historiadores consideram Kilvington um dos primeiros «Calculadores» de Oxford. Norman Kretzmann inclui-o nesse grupo (cfr. N. Kretzmann e B. Kretzmann (eds.), *The Sophismata of Richard Kilvington: Introduction, Translation, and Commentary*, Cambridge University Press, Cambridge 1990, p. xxi).

2 Os trabalhos dos «Calculatores» expressam de um modo extraordinário a «measure mania» (na expressão de John Murdoch, «The Involvement of Logic in Late Medieval Natural Philosophy», *in* S. Caroti e J. Murdoch (eds.), *Studies in Medieval Natural Philosophy*, Leo S. Olschki Editore, Firenze 1989, p. 19) que irrompeu na Idade Média tardia. J. North, «Natural Philosophy in Late Medieval Oxford», *in* J. I. Catto - R. Evans (eds.), *The History of the University of Oxford*, vol. II: Late Medieval Oxford, Clarendon Press, Oxford 1992, p. 82: «we suddenly find Oxford scholars trying to quantify anything of which certain knowledge was wanted - not to measure it, but to talk of it as though it were measurable».

3 Para uma descrição concisa e satisfatória do conteúdo das principais obras deste autor, *vide* J. Murdoch, «Thomas Bradwardine», *in* Ch. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 2, Charles Scribner's Sons, New York 1970, pp. 390-395.

4 Tomás Bradwardine, *De continuo*, ed. J. Murdoch, *Geometry and the Continuum in the Fourteenth Century: A Philosophical Analysis of Thomas Bradwardine's Tractatus de Continuo*, Ph.D. dissertation, University of Wisconsin, 1957, pp. 339-471.

5 Assiste-se a uma passagem dos escritos de carácter filosófico-científico para os de carácter teológico. *Vide* J. Murdoch - E. Synan, «Two Questions on the Continuum: Walter Chatton (?), O.F.M. and Adam Wodeham, O.F.M.», *Franciscan Studies*, 26 (1966) p. 221, n. 33.

texto é de facto de Tomás Bradwardine (embora os manuscritos de Torun e Paris apontem para essa atribuição: o manuscrito de Torun por meio de um *explicit*[6] e o fragmento de Paris apresentando o nome «Bradwardin» escrito na margem; ou seja, só no manuscrito de Erfurt não se encontra qualquer referência à autoria do tratado)[7]. Aliadas a estas indicações, algumas outras «pistas» parecem corroborar a tese da genuidade da atribuição do *De continuo* a Bradwardine, tais como: (1) o facto de o *De proportionibus velocitatum in motibus* ser inegavelmente um trabalho deste «calculator» e, de entre tantas outras obras citadas no *De continuo*, ser a única obra latina medieval que Bradwardine indica; (2) ter sido escrito segundo o modelo axiomático (opção que se verifica também na *Geometria speculativa*, o *De proportionibus* e o *De causa Dei* - obras do autor); (3) uma particularidade acerca de um conteúdo expresso no *De continuo*, na Conclusão 19, a saber: a semelhança com um argumento presente numa outra obra cuja autoria é inquestionavelmente de Bradwardine (a *Geometria speculativa*)[8]. Tendo considerado e ponderado um conjunto de argumentos que podem ser apontados tanto a favor como contra tal atribuição[9], Murdoch crê que a tese de que o *De continuo* se trata de facto de um tratado da autoria de Tomás Bradwardine assume um maior grau de verosimilhança.

O *Tractatus de continuo* foi redigido no contexto da controvérsia originada pela emergência da defesa de um atomismo matemático na Universidade de Ox-

6 «*Sic igitur primus liber, qui est de compositione continui ad sua essentialia, finem capit. Amen. Explicit tractatus Bratwardini de continuo*.»

7 T = Torun, Gymnasialbibliothek, R. 4°. 2, pp. 153-192.
E = Erfurt, Universitäts- und Forschungsbibliothek (olim Stadtbibliothek), Amplon. 4° 385, ff. 17r-48r.
P = Paris, Bibliothèque Nationale, Nouv. acq. lat. 625, f. 71v.

8 Cfr. *Geometria speculativa*, ed. G. MOLLAND, *Thomas Bradwardine, Geometria Speculativa*. Latin Text and English Translation with an Introduction and a Commentary, Steiner, Stuttgart 1989, p. 64.

9 *Vide* J. MURDOCH, *Geometry and the Continuum*, cit., pp. 328-332. Nestas páginas encontra-se uma exposição bastante clara e interessante dos elementos que pesam a favor e contra a tese da atribuição do texto *De continuo* a Bradwardine. Como resultado da análise crítica dos dados disponíveis, Murdoch conclui que «the *De* continuo is a work of Bradwardine, be it written by this master himself, or be it a subsequent account of his doctrine». Para uma síntese da apresentação do problema da autoria, *vide* J. MURDOCH, «Thomas Bradwardine: Mathematics and Continuity in the Fourteenth Century», *in* E. GRANT - J. E. MURDOCH (eds.), *Mathematics and its Applications to Science and Natural Philosophy in the Middle Ages. Essays in Honor of Marshall Clagett*, Cambridge University Press, Cambridge 1987, pp. 104 e 131.

ford, durante a primeira metade do século XIV. Até então, a tese divisibilista de tradição aristotélico-escolástica dominava, (quase) sem qualquer voz divergente, o panorama das respostas dadas ao problema do contínuo. Retratando a questão *de compositione continui*, sob diversos ângulos, Bradwardine denuncia os absurdos que a defesa da *compositio continui ex indivisibilibus* engendra. O filósofo inglês Henrique de Harclay (c. 1270-1317; *Questiones*) apresenta-se, na história da filosofia, muito possivelmente como o primeiro dos atomistas cristãos. Outro autor se lhe sucede: Gualter Chatton (c. 1290-1343; *Reportatio super Sententias*). Estes são então os filósofos pioneiros envolvidos na actividade de exploração de uma nova perspectiva – o indivisibilismo, figurando também na lista dos adversários que Bradwardine tem na sua mira quando redige o *Tractatus de continuo*. Apresentando teorias atomísticas em moldes diferentes, os trabalhos de Harclay e de Chatton constituem a totalidade das concepções indivisibilistas no contexto inglês. Vários foram os filósofos ingleses que, reagindo imediata e energicamente a tal ousadia, se inscreveram na cruzada de movimento crítico relativamente a esta recente posição indivisibilista assumida no interior da Universidade de Oxford, nomeadamente Guilherme de Alnwick (c. 1275-1333; *Determinationes*)[10] e Adão Wodeham (c. 1298-1358; *Tractatus de indivisibilibus*)[11]. Estes são os actores principais da querela mencionada ao nível do cenário inglês.

Noutra Universidade eclodirá o mesmo problema, um pouco depois[12] – temos

10 Guilherme de Alnwick parece ter sido o primeiro neste movimento de contra-resposta. A investida crítica de Alnwick contra Harclay coincide, temporalmente, com o aparecimento da segunda doutrina indivisibilista – a de Chatton, que Alnwick parece desconhecer, não se referindo a ela na sua crítica (ao passo que Wodeham já dirige a sua crítica a ambos).

11 «Though Bradwardine's critique of these two *moderni* [*Henricus modernus* e *Waltherus modernus*] may well be more astute and definitive than that offered by Adam Wodeham, it is, in a sense, less informative. For, perhaps due to the mathematical structure of his *Tractatus*, he found it unfitting to give anything like the full spectrum and characteristics of Harclay's and Chatton's reasoning. For this Wodeham is a far richer source», J. Murdoch - E. Synan, «Two Questions on the Continuum», cit., p. 222.

12 As críticas à doutrina aristotélica surgem tanto em Inglaterra como no continente europeu quase ao mesmo tempo. Segundo Murdoch, não existem dados que nos permitam inferir com segurança que a Universidade de Paris segue o exemplo inaugurado pela de Oxford pela ocorrência de rápida disseminação das teorias atomísticas inglesas. Cfr. J. Murdoch, «Naissance et développement de l'atomisme au Bas Moyen Âge Latin», *in* G.-H. Allard - J. Ménard (eds.), *Cahiers d'études médiévales II. La science de la nature: théories et pratiques* (1974), p. 14. Sabemos que na década de 1330-1340, houve uma «vaga de difusão» de Oxford para o continente (cfr. W. Courtenay, *Schools & Scholars in Fourteenth-Century England*, cit., p. 236; e ainda *ibidem*, pp.

então, no espaço continental, a Universidade de Paris como palco de contenda entre os filósofos atomistas Gerardo de Odon (c. 1285-1349; *Tractatus de continuo*) e Nicolau Bonetus (?-1360; *Praedicamenta*), entre outros, e os seus adversários, nomeadamente João o Canónico (?; *Questiones super octo libros physicorum)*[13]. O facto de toda esta polémica, tanto em Inglaterra como no continente europeu, se ter formado e desenvolvido num espaço curto de tempo (a saber: entre, aproximadamente, 1315 e 1335)[14] e ser ilustrada por um número significativo de textos redigidos pelos partidários de doutrinas opostas parece evidenciar a importância dada pelos autores medievais à questão. O indivisibilismo parece ter conquistado cedo um certo reconhecimento no contexto intelectual da época, facto que justificaria o esforço de Bradwardine em conceber um tratado com argumentos baseados preferencialmente na ciência matemática (dado o elevadíssimo nível de respeitabilidade de que goza no conjuntos dos saberes) e imitando o arquétipo de ciência sistemática e precisa que constitui os *Elementos*, ambicionando arredar de vez com tais explicações (supostamente) erróneas.

O *Tractatus de continuo* de Bradwardine é uma obra de carácter matemático, tanto pela forma axiomática como o filósofo expõe as suas ideias, como pelos conteúdos expressos. Inspirada nos *Elementos*[15] de Euclides, esta obra é composta por uma série de «Definições» (24) e «Suposições» (10) apresentados no início do tratado, com base na qual todo um conjunto de «Proposições» ou «Con-

---

157-158, onde se lê «…English scholars would have mixed and shared ideas with scholars from Paris…»). Anteriormente, bastava uma ou outra viagem de teólogos ingleses para Avinhão ou Paris (o que, nessa altura, não era assim tão raro acontecer) para que estivesse criado o terreno para a ampla difusão da ideia. E esta é uma conjectura plausível que pode esclarecer a situação verificada. J. Biard - J. Celeyrette (eds.), *De la théologie aux mathématiques. L'infini au XIVe siècle*, Les Belles Lettres, Paris 2005, p. 31: «…du débat qui se développe à Oxford (…). A partir des années 1326-1330 la polémique se déplace à Paris». Para uma noção mais ampla da difusão de concepções físicas defendidas em Oxford para Paris, *vide* E. Sylla, «Transmission of the New Physics of the Fourteenth Century from England to the Continent», *in* S. Caroti - P. Souffrin (eds.), *La nouvelle Physique du XIVe siècle*, Leo S. Olschki, Firenze 1997.

13 J. Murdoch - E. Synan, «Two Questions on the Continuum», cit., p. 215: «the whole history of atomism in the fourteenth century (…), in most of its aspects derives from the work of Harclay and Chatton, Gerard of Odo and Nicholas Bonettus, and from the writings their atomist conclusions provoked».

14 *Vide ibidem*, p. 217.

15 Para uma introdução geral aos *Elementos* de Euclides, por meio de uma abordagem de tópicos muito diversificados, *vide*, *v. g.*: *Elementos*. Introducción de L. Vega, traducción y notas de M. L. P. Castaños, vol. 1, Editorial Gredos, Madrid 2000, pp. 7-48 e 123-151.

clusões» (151)[16] decorre[17]. Algumas destas conclusões podem ainda ser seguidas de uma consequência suplementar da demonstração, isto é, por um corolário. É ao longo das «Conclusões» que o filósofo procura refutar as teses atomísticas (cada uma das conclusões iniciais prepara essa crítica), colocando em evidência a impossibilidade destas serem verdadeiras pois colidem com princípios básicos de todos os domínios do conhecimento. As conclusões do tratado começam por ser demonstradas por dedução lógica a partir de um conjunto de proposições indemonstradas mas admitidas como verdadeiras e, depois também, a partir de proposições já provadas.

No *De continuo*, as definições (*diffinitiones*) e as suposições (um conjunto de postulados e axiomas que designa por *suppositiones*) assumem a função de princípios primeiros. Estes funcionam como princípios de dedução. Nos *Analíticos Posteriores*, Aristóteles apresentava o traço definitório da ciência: ser um conhecimento demonstrativo assente em princípios primordiais que se oferecem como as primeiras premissas para raciocínios subsequentes[18]. A forma do conhecimento científico é, então, a demonstração e na base desta estão sempre uns princípios primeiros indemonstráveis. Tais princípios não podem ser demonstrados porque se se tivesse de demonstrar tudo, nada poderia ser demonstrado: é condição da demonstrabilidade do conhecimento o facto de a demonstração não prosseguir até ao infinito[19]. Assim, «o ponto de partida de uma demonstração não é demonstração[20]» mas antes um conjunto suficiente de proposições que possuem o estatuto de princípios e são capazes de impulsionar a dedução, cumprindo um papel determinante na obtenção ou organização dedutiva de resultados dentro de uma disciplina científica. Um sistema hipotético-dedutivo, coerente e ordenado res-

16 O manuscrito de Erfurt acrescenta mais duas conclusões a este número: as conclusões 107A e 121A da edição crítica de John Murdoch.

17 Cfr. J. Murdoch, *Geometry and the Continuum*, cit., pp. 339-471. Uma estrutura detalhada do *De continuo* foi proposta por Murdoch. Cfr. J. Murdoch, «Thomas Bradwardine: Mathematics and Continuity in the Fourteenth Century», cit., pp. 105-107.

18 Múltiplos aspectos da concepção aristotélica de ciência, tal como formulada nos *Analíticos Posteriores*, analisados *in* E. Berti (ed.), *Aristotle on Science: the «Posterior Analytics»*. Proceedings of the Eighth Symposium Aristotelicum, Editrice Antenore, Padova 1981.

19 *Vide* Aristóteles, *Analíticos Posteriores*, I, 3, 72b5-23. E ainda, na *Metafísica*, IV, 4, 1006a6-9: «...de que coisas se pode pedir demonstração, e do que não se pode (...). Porque é impossível que exista demonstração absolutamente de tudo; existiria uma regressão infinita, de maneira que não existiria ainda demonstração».

20 Aristóteles, *Metafísica*, IV, 6, 1011a12-13.

peitando-se criteriosamente as regras da lógica relativas ao raciocínio, construído com base num conjunto de princípios primeiros, verdadeiros e indemonstráveis, torna-se um edifício em que os resultados obtidos gozam dos selos da infalibilidade ou incontestabilidade[21].

Expondo a sua teoria da demonstração, Aristóteles enuncia as características distintivas destes princípios primeiros, a saber: eles são (1) verdadeiros, (2) primários e indemonstráveis, (3) imediatos e anteriores às conclusões, e (4) mais familiares do que e explicativos das conclusões[22]. Estas proposições são as causas necessárias das conclusões[23]. Constituindo as causas de todos os resultados, estes princípios não são eles mesmos causados por nada. Pelo facto de serem primordiais, não se lhes pode aplicar um procedimento demonstrativo: já não há outros princípios (que lhes fossem anteriores) que pudessem servir de premissas, e toda a demonstração parte de premissas[24]. Logo, estes princípios valem por si e ou são indemonstráveis ou demonstrados a partir de premissas indemonstráveis. Note-se que estas causas são «melhor conhecidas[25]» mas há que as desvelar - daí o nome de *analítica*.

Aristóteles distingue ainda dois grupos de princípios primeiros: aqueles que são «específicos» de cada ciência em particular (as «definições» e as «suposições» ou «postulados») e os que são *comuns* a mais do que uma ciência (os «axiomas[26]»). Detenhamo-nos numa breve caracterização dos três tipos de princípios primeiros.

Uma definição é uma fórmula que estabelece o significado de um termo ou expressão representativos de alguma coisa[27]. Apresentando a predicação essen-

21 Aristóteles, *Metafísica*, V, 5, 1015b6-9: «a demonstração é uma coisa necessária, porque a conclusão não pode ser de outro modo, se houve demonstração no sentido pleno; e as causas desta necessidade são as primeiras premissas, isto é, o facto de que as proposições a partir das quais a dedução procede não podem ser de outro modo».

22 *Vide* Aristóteles, *Analíticos Posteriores*, I, 2, 71b20-33 e seguintes.

23 *Vide* Aristóteles, *Analíticos Posteriores*, I, 6, 74b5-12.

24 Aristóteles, *Metafísica*, III, 2, 997a7-9: «porque é impossível que exista demonstração acerca de todas as coisas; porque a demonstração deve começar a partir de certas premissas e ser sobre um certo sujeito e provar certos atributos».

25 Aristóteles, *Metafísica*, I, 2, 982b1-5: «...o conhecimento daquilo que é mais cognoscível; e os princípios primeiros e as causas são mais cognoscíveis; porque em razão destes, e a partir destes, todas as outras coisas são conhecidas, mas estes não são conhecidos por meio das coisas subordinadas a eles».

26 *Vide* Aristóteles, *Analíticos Posteriores*, I, 10, 76a37-40.

27 *Vide* Aristóteles, *Analíticos Posteriores*, II, 10, 93b29.

cial, «nós conhecemos cada coisa pela sua definição[28]», ou seja, «a definição é a fórmula da essência[29]». De facto, toda a definição (*definiens*) deverá anunciar os atributos principais respeitantes à natureza da entidade em causa (*definiendum*), mas não é sua função a de se pronunciar acerca da existência ou inexistência da mesma[30]. A ciência é alcançada por meio da demonstração e como «a essência é o ponto de partida das deduções[31]» cada ciência cria as definições dos conceitos com que trabalha. Portanto, estes princípios primeiros[32] são próprios de cada ciência em particular.

As suposições ou os postulados são também princípios primeiros, enunciados para o universal ou para o particular[33], específicos de uma área do saber. Neles afirma-se ou nega-se a existência de algo[34]. Se o proponente assume sem provar alguma coisa que até parece ser o caso para o interlocutor, ele «supõe-na» e a tese vale como uma suposição em relação a este último; mas se ele assume a mesma coisa quando o interlocutor não tem opinião acerca do assunto ou é de parecer contrário ao que se apresenta, ele «postula-a». Trata-se então de uma tese demonstrável mas admitida pelo proponente sem prova e a partir do momento em que o interlocutor consente na suposição, então passa a ser uma hipótese de trabalho[35]. Um postulado é então qualquer proposição não evidente que se pedia que fosse admitida por ser necessária à elaboração de um sistema dedutivo.

Por último, os axiomas são princípios aplicáveis a várias ciências (por exemplo, «*omne totum est maius sua parte*»). O facto de serem princípios enunciados

---

28 Aristóteles, *Metafísica*, III, 3, 998b4.

29 Aristóteles, Metafísica, VII, 5, 1031a12. Cfr. ainda, *v. g.*: *Idem*, *Tópicos*, I, 5, 101b37: «Uma definição é uma expressão que significa a essência duma coisa».

30 Uma coisa é dizer, por exemplo, o que *é* a unidade, e outra é dizer que a unidade *existe* (*vide* Aristóteles, *Analíticos Posteriores*, I, 2, 72a21-24). J. Murdoch, *Geometry and the Continuum*, cit., p. 65: «in positing a definition (…) we merely say *what* a thing is, and not *that* it is». Cfr. ainda Aristóteles, *Analíticos Posteriores*, II, 10, 93b39-94a1.

31 Aristóteles, *Metafísica*, XIII, 4, 1078b24-25.

32 Aristóteles, *Metafísica*, III, 2, 997a31-32: «não existe demonstração da essência das coisas».

33 *Vide* Aristóteles, *Analíticos Posteriores*, I, 10, 77a3.

34 Aristóteles, *Analíticos Posteriores*, I, 2, 72a19-21: «Uma tese que assume uma das partes de uma contradição – isto é, quero dizer, que algo existe ou que algo não existe – eu chamo uma suposição; uma sem isto, uma definição».

35 *Vide* Aristóteles, *Analíticos Posteriores*, I, 10, 76b27-34. Note-se que as discrepâncias nas traduções de certos termos do texto grego de Aristóteles conduzem a resultados teóricos desiguais. Cfr. J. Murdoch, *Geometry and the Continuum*, cit., pp. 71 (em particular, a nota 33) e 72. Nós seguimos a tradução de J. Barnes, em *The Complete Works of Aristotle - The Revised Oxford Translation* (1985).

sob a forma de proposições compostas (tal como as suposições, e contrastando com as definições que são um todo indecomponível) não obsta a que sejam imediatamente inteligíveis. A apreensão do seu sentido dá-se intuitivamente, basta que se conheça o significado geral dos termos que compõem a proposição e se atente no tipo de relação que estabelecem entre si e o princípio torna-se absolutamente claro[36]. São, então, princípios evidentes *per se* dada a imediata evidência que ressalta dos termos inter-relacionados de um certo modo.

É possível estabelecer - e assiste-se, em abundante literatura, a uma grande tendência para o intentar fazer - um paralelismo entre os tipos de princípios primeiros da teoria aristotélica da ciência demonstrativa exposta nos *Analíticos Posteriores* e a axiomática presente nos *Elementos* de Euclides[37]; muito embora, retenha-se, a natureza dos mesmos não seja absolutamente coincidente (se é que tal comparação poderia alguma vez ser feita de um modo consequente e concludente, com base no que é dito ou não dito por ambos)[38]. A subdivisão apresentada pelos dois autores também não corresponde na exactidão, mas assemelha-se bastante: as «definições» aristotélicas equivalem às «definições» euclídeas, as «suposições» ou «postulados» aos «postulados» e, por último, os «axiomas» às «noções comuns» dos *Elementos*.

Ainda assim, advertências feitas, parece-nos de alguma utilidade avançar para uma brevíssima caracterização comparativa dos princípios primeiros de Aristóteles e os da geometria euclídea[39]. E isto pela razão que se segue: o *De continuo* de Bradwardine apresenta também no início do tratado todo um conjunto de princípios primeiros indemonstráveis cujas características não assentam na perfeição nem no regulamento aristotélico nem no plano euclídeo, mas patenteiam indiscutivelmente uma mescla de ambos.

---

36 Tomás Bradwardine, *Geometria speculativa*, 1.039: «*Hec [i.e., communes animi conceptiones sive commune scientie] igitur et consimiles dicuntur propositiones prime et immediate, quoniam statim ex confuso conceptu terminorum cognoscuntur sine discursu, vel, si cum discursu, discursus tamen huiusmodi non est perceptibilis multum, et ideo tanquam prime admittuntur*». Entenda-se *conceptus confusus* como expressão da ideia de «conceito geral» ou «significado geral» (*in* J. MURDOCH, *Geometry and the Continuum*, cit., p. 70, n. 29).

37 Até porque se sabe que a teoria aristotélica teve eco em Alexandria. Cfr. Euclides, *Elementos*, ed. cit., vol. 1, pp. 122-123.

38 Acerca da discutibilidade desta correspondência (por implicar o pressuposto de que tanto a classificação aristotélica como a euclídea são «claras e inequívocas»), cfr. Euclides, *Elementos*, ed. cit., vol. 1, pp. 113-117.

39 Para uma perspectiva mais abrangente em torno das semelhanças e diferenças, *vide* Euclides, *Elementos*, ed. cit., vol. 1, pp. 117-120.

Euclides não se pronunciou sobre a natureza e função das definições, postulados ou noções comuns[40], mas parece existir alguma concordância, de uma maneira em geral, com o programa aristotélico. As suas definições também apontam para os atributos essenciais do objecto (abstracto - as definições em matemática são «nominais») sem se postular a sua existência (e se bem que postule a existência de linhas rectas, círculos, etc., fá-lo já não no domínio das definições mas dos postulados; ou seja, a sua existência não é efectiva até que a construção dos mesmos seja realizada). Agora, nem todas as definições apresentadas por Euclides satisfazem os critérios aristotélicos. Existem regras a tomar em consideração quando se elabora uma definição e nem sempre estas são seguidas pelas definições euclídeas[41]. Quanto a Bradwardine, a respeito das definições, este adopta a teoria aristotélico-escolástica[42].

Relativamente aos postulados de Euclides, é mais difícil sugerir que estes sejam postulados no sentido aristotélico, mas também parecem ter o significado geral de «hipótese» pois por meio deles afirma-se a existência matemática de certas entidades geométricas que será provada pela construção. Mostrando alguma afinidade com a noção de suposição ou postulado aristotélica, todos eles são próprios de uma ciência particular - a geometria. Para os gregos, provar a existência de um objecto geométrico equivale a construí-lo[43]. No tratado euclídeo, normalmente a construção ou a solução de problemas invoca mais a comparência dos postulados[44], ao passo que os axiomas associam-se tendencialmente à demonstração de

---

40 «Em geral, não existem critérios que justifiquem a presença efectiva de cada princípio num dos três grupos distinguidos por Euclides, ou critérios que permitam uma redistribuição cabal dos casos mais problemáticos», Euclides, *Elementos*, ed. cit., vol. 1, p. 117.

41 Exemplo de uma infracção: «um ponto é o que não tem partes» (Livro I, Def. 1). Esta definição não incorre no erro lógico de se definir o «anterior» (ponto) pelo que lhe é «posterior» (linha), como acontece quando se define antes assim: «o ponto é o extremo de uma linha» (cfr. Aristóteles, *Tópicos*, VI, 4, 141b20-26). No entanto, acaba por ser demasiado ampla (o predicado dado) e, por conseguinte, não se lhe pode aplicar a regra da reciprocidade necessária entre o *definido* e a *definição* (havia que se ter acautelado, pois, a possibilidade de haver outras coisas que não têm partes mas que não são pontos; por exemplo, a unidade).

42 Cfr. Tomás Bradwardine, *Geometria speculativa*, 1.01: «*A diffinitionibus igitur, que exprimunt significata terminorum exordium facimus, significata enim terminorum omnibus presupponi habent*».

43 *Vide* W. Knorr, «Construction as Existence Proof in Ancient Geometry», *Ancient Philosophy*, 3, 1983.

44 Daí que os livros dos *Elementos* dedicados à aritmética não apresentem postulados nem problemas, pois os números não são susceptíveis de «construção» mas de «determinação» (*in* Euclides, *Elementos*, ed. cit., vol. 2, p. 120, n. 81).

teoremas[45]. Relativamente à noção de postulado em Bradwardine, podemos dizer que o filósofo não se manifesta acerca da sua função de atribuir a existência ou não-existência (embora alguns destes postulados sejam efectivamente postulados de existência[46]), mas refere que são indemonstráveis[47]. Menciona ainda que ao que Aristóteles chamava de «suposições» a geometria chama «postulados[48]». O grupo de dez suposições que figura no seu tratado acaba por ser um conjunto heterogéneo de princípios primeiros, sendo uns comuns a várias ciências (os axiomas) e outros próprios de uma ciência em particular (os postulados). Bradwardine não estabeleceu uma distinção entre os dois tipos de princípios primeiros, trazendo-os a todos para uma secção que denomina de «suposições» e que são, para o autor, os postulados. Mas, na verdade, os cinco primeiros princípios são, em bom rigor, axiomas; ao passo que os restantes, e em igual número, são postulados e respeitantes à cinemática. Note-se ainda que as Suposições 7 e 8 não constituem princípios primeiros, embora figurem nessa lista. Facilmente se percebe que se trata antes de resultados científicos alcançados pelos estudos da cinemática[49].

No respeitante aos axiomas, Bradwardine mostra-se próximo da designação euclídea, quando os encara como «concepções comuns da mente[50]». Euclides chama aos axiomas «noções comuns», o que o aproxima logo da caracterização

---

45 *Vide* Euclides, *Elementos*, ed. cit., vol. 1, p. 115. Lê-se ainda in *op. cit.*, p. 119: «... la diferente función que pueden cumplir las definiciones y las hipótesis de los *Analíticos* (...) y las definiciones y los postulados de los *Elementos* (...): en la teoría aristotélica no pasarán de ser premisas de una argumentación concluyente, mientras que en la práctica euclídea desempeñan un papel importante en la fase de preparación y conformación metódica de la prueba (...), y las premisas de la fase demostrativa propiamente dicha (...) suelen ser más bien las nociones comunes o las proposiciones previamente establecidas.»

46 A saber: as suposições 1, 5, 6 e 9. Cfr. Tomás Bradwardine, *De continuo*, ed. J. Murdoch, cit., pp. 197-198.

47 Tomás Bradwardine, *Geometria speculativa*, 1.025: «*Dicuntur igitur huiusmodi propositiones vel dicta petitiones sive suppositiones, quoniam petuntur et supponuntur nec probantur, videntur enim evidentiam sufficientem habere ex solo confuso terminorum conceptu*».

48 Tomás Bradwardine, *Geometria speculativa*, 1.00: «*Positionis autem, quoddam genus est principium complexum, et vocatur ab Aristotele suppositio, in geometria petitio*».

49 «However, Bradwardine includes them among his first principles in order to avoid the necessity of *proving* them as one would do in kinematics proper», J. Murdoch, *Geometry and the Continuum*, cit., p. 96.

50 Tomás Bradwardine, *Geometria speculativa*, 1.00: «*Huiusmodi autem principiorum [i.e., principia demonstrationis] quoddam est dignitas vel maxima propositio, et ad hoc genus principiorum reducuntur propositiones immediate in geometria que dicuntur communes animi conceptiones sive communes scientie*».

que Aristóteles faz daqueles[51]. No entanto, observa-se que o chamado axioma da congruência, que é uma suposição própria da geometria, aparece junto dos outros axiomas mais gerais. Euclides situou esta proposição entre os axiomas.

Para além destas considerações, também se pode acrescentar que nada obsta a que os princípios primeiros euclídeos (definições, postulados e noções comuns), a terem sido qualificados, teriam sido encarados como verdadeiros e indemonstráveis, tal como na teoria do Estagirita, e que Euclides concorde com a posição aristotélica de que esses seriam as causas das conclusões. O próprio Bradwardine corrobora esta tese[52]. É também evidente que, na trama do *De continuo*, as definições e as suposições assumem o papel de princípios primeiros.

Se quisermos ainda estabelecer um paralelo entre o plano arquitectónico dos *Elementos* e o do *De continuo*, colocando de parte tantos aspectos que os distinguem, poderíamos dizer que, à semelhança do que acontece no tratado euclídeo, os enunciados das Conclusões no tratado de Bradwardine apontam para a construção de um objecto matemático (na linguagem técnica dos *Elementos* estaríamos diante de um problema a resolver - *Q.E.F.*: *Quod erat faciendum*) ou para a demonstração de alguma característica de um objecto em causa (nos *Elementos*, essa característica seria um atributo ou relação de um objecto matemático e tratar-se-ia de um teorema a demonstrar - *Q.E.D.*: *Quod erat demonstrandum*; no *De continuo* pode ser um objecto de uma outra área disciplinar para além da matemática)[53]. Após tais proposições, seguem-se as provas. Estas são, muitas das vezes, construídas com base num caso particular qualquer que aplique o que o enunciado reclamava e escolhem-se letras para designar, abreviadamente, os objectos de referência (pontos, linhas, figuras, ângulos...). A prova desenrola-se até que se obte-

---

51 Esta aproximação terminológica não tem de equivaler a igualdade de perspectiva. Cfr. J. Murdoch, *Geometry and the Continuum*, cit., pp. 68-69. Luis Vega, investigador até bastante reticente relativamente ao grau de eficiência possível desta tarefa de comparação da teoria aristotélica e a prática euclídea quanto à demonstração (qualificando-a de «pouco prometedora» - p. 117, dada a «diferença de 'espírito' ou de intenção» que distingue os trabalhos daqueles dois intelectuais gregos - p. 120), aceita que o seja. Cfr. Euclides, *Elementos*, ed. cit., vol. 1, p. 118.

52 Tomás Bradwardine, *Geometria speculativa*, 1.00: «*Suppono igitur principia demonstrationis. Voco autem principia demonstrationis diffinitiones et propositiones immediatas, quoniam propositiones immediate non habent se priores ex quibus demonstrentur*».

53 Em geral, as Proposições nos *Elementos* indicam a demonstração de um teorema ou a resolução de um problema. No entanto, note-se que não se trata de compartimentos estanques. Acerca da «tradição ambígua» da distinção entre os problemas e teoremas, *vide* Euclides, *Elementos*, ed. cit., vol. 1, pp. 33-35.

nha o fim proposto (*et propositum patet*[54]). Conhecimentos prévios assumem um papel fundamental na demonstração: as provas assentam em proposições primordiais (os primeiros princípios – *definitiones et suppositiones*) podendo ainda também derivar de proposições cuja verdade foi verificada em provas anteriores e/ou ganharem esse mesmo estatuto de provas incontestáveis por apoiarem-se em certas proposições presentes na geometria euclídea (estas últimas têm decididamente um carácter probatório, escusando-se então Bradwardine de as provar - a autoridade dos *Elementos* assim permitia). Neste tratado, vemos os princípios primeiros a servir de motor de arranque para as primeiras conclusões e destas para todo o sistema demonstrativo, pela dedução correctamente ordenada das consequências lógicas desses conhecimentos anteriores que são as suas causas. Conhecimentos prévios transitam então para os resultados que se seguem, como que numa cadeia em que os elos se fecham em cada prova dada e se abrem às novas conclusões que dos dados conhecidos resultam. Uma «Proposição» decide-se na sua prova e confere ainda a possibilidade de prova da seguinte. Progressivamente acumulam-se novos resultados até que se desemboque nas conclusões mais ambicionadas, que são aquelas que arredam com o indivisibilismo.

É ainda importante referir que por meio de uma só demonstração - conduzida segundo o método axiomático, respeitando-se as regras da lógica e a ordem devida dos passos dedutivos-, infere-se conclusões válidas em três domínios: (1) o que é verdadeiro de um caso particular; (2) o que é verdadeiro de um qualquer outro caso da mesma classe, generalizando-se os resultados obtidos por meio de x-procedimento metódico (ou seja: entenda-se, por exemplo, «Seja uma recta AB...» como a expressão da seguinte ideia «Considere-se a recta tal e qual como uma recta qualquer[55]»)[56]; e (3) o que é verdadeiro no domínio da física[57].

---

54 Para uma «pauta geral» da prova típica nos *Elementos*, *vide* Euclides, *Elementos*, ed. cit., vol. 1, pp. 35-37.

55 Euclides, *Elementos*, ed. cit., vol. 1, p. 38.

56 As demonstrações que Bradwardine apresenta dizem respeito a casos particulares de contínuos e a garantia de que tais provas têm uma validade generalizável a todos os casos do mesmo género prende-se com a Suposição 3.

57 Os autores escolásticos, apoiando-se na filosofia aristotélica, acreditavam que o que é dito acerca do contínuo matemático é igualmente verdadeiro para o contínuo físico (o que é explicável também pelo entendimento da matemática enquanto *scientia realis - vide Conclusio* 57 do *De continuo*). Para Aristóteles, os entes matemáticos são «modos de ser estruturais das coisas sensíveis» (G. Reale, *Guía de lectura de la «Metafísica» de Aristóteles*, Herder, Barcelona 1999, p. 185). Como afirma Molland, «Bradwardine's *realist* view of geometry also led him to take the onto-

O objectivo do tratado *De continuo* é a refutação do indivisibilismo como explicação para a composição dos contínuos, o que Bradwardine pensa alcançar evidenciando todo um conjunto de contradições lógicas que decorreriam dessa perspectiva conjugada com (1) os princípios primeiros de que já falámos, (2) as proposições destes legitimamente derivadas e (3) as verdades (pelo menos algumas) demonstradas pela geometria euclídea. Os argumentos que mostram os absurdos que o indivisibilismo arrasta consigo são construídos ou a partir de hipóteses indivisibilistas ou são inferidos contra estas opiniões. Neste contexto, é frequente a aparição, ao longo do tratado, de um *falsigraphus*: a figura de um oponente que Bradwardine passará a invocar no desenvolvimento de algumas conclusões, não identificando alguém em particular[58]. É por meio deste falsígrafo

---

logical consequences seriously» (G. Molland, «An Examination of Bradwardine's Geometry», *Archive for History of Exact Sciences*, 19, 1978, p. 135). Cfr. *Ibidem*, p. 174, 4. da «Conclusão». Tomando a via aristotélica, como os objectos da geometria têm uma existência potencial na natureza, ainda que a demonstração de Bradwardine se faça no âmbito dos contínuos geométricos, os resultados obtidos valem ainda para os contínuos físicos. J. Murdoch, *Geometry and the Continuum*, cit.: «Bradwardine was firmly convinced that whatever he had to say concerning the mathematical – for him strictly geometrical – continuum applied also to the physical continuum» (p. 316); «he undoubtedly intends to infer that whatever be the structure of the mathematical continuum, so must be the structure of the physical continuum» (p. 324). Hoje em dia já não se defenderia tal. «The only reason that allowed Bradwardine to make this erroneous inference lay in a fundamental confusion between the formal, mathematical sciences and those of the physical world», J. Murdoch, *Geometry and the Continuum*, cit., p. 316. O *De continuo* espelha bem a filosofia da ciência no século XIV.

58 O que não obsta a que seja, no entanto, uma pessoa real; ou então representa antes qualquer opositor atomista que erguesse uma tese contrária. Numa outra obra de Bradwardine, o *De causa Dei*, também aparece um *falsigraphus* que Podkoński julga ter identificado. Cfr. R. Podkoński, «Thomas Bradwardine's Critique of Falsigraphus's Concept of Actual Infinity», *Studia Antyczne i Mediewistyczne*, 36, 2003, pp. 146-153. *In* p. 152: «It is not absolutely certain that Kilvington is the *falsigraphus*, but – in my opinion – (…) sufficient to formulate such a hypothesis». *In* p. 153: «About the time when Bradwardine composed his treatise *De continuo*, Richard Kilvington lectured on the *Sentences*. (...) I think we can see here the beginning of a philosophical controversy between Kilvington and Bradwardine that was fully expressed later in *De causa Dei*». Segundo A. Maier, Ricardo Kilvington também era defensor de uma perspectiva indivisibilista, ao sustentar que os contínuos são compostos por um número infinito de indivisíveis imediatos *infinitesimalmente extensos* (posição relativamente à qual não há qualquer alusão no *De continuo*). *Vide* J. Murdoch, *Geometry and the Continuum*, cit., p. 223, n. 29. R. Podkoński e E. Jung não partilham daquela ideia. Conforme se lê *in* C. Grellard - A. Robert (eds.), *Atomism in Late Medieval Philosophy and Theology*, Brill, Leiden 2009, p. 10: «Kilvington (...) remains a firm defender of infinite divisibility as an absolute principle». O termo *falsigraphus* foi por nós traduzido por «falsígrafo». Outras traduções do termo: «celui qui a posé l'hypothèse fausse» (S. Rommevaux, «Traité sur le continu», *in* J. Biard - J. Celeyrette (eds.), *De la théologie aux

que uma série de eventuais contra-argumentos às demonstrações de Bradwardine é apresentada, desencadeando novas e adicionais demonstrações.

O primeiro rol de conclusões que Bradwardine apresenta respeitam o valor de verdade (as proposições «positivas», como Murdoch lhes chama), sendo no desenrolar do sistema demonstrativo que os argumentos falsos vão sendo então desenhados. Bradwardine começa a manifestar a vertente crítica a partir da Conclusão 34. A defesa da tese da composição indivisibilista dos contínuos começa a perder a pretensa sustentabilidade dado o surgimento de inúmeras contradições com proposições aceites como verdadeiras. Nas «conclusões refutatórias», Bradwardine emprega preferencialmente o método da redução ao absurdo. Muitas são as proposições dedicadas à refutação do indivisibilismo: no cômputo geral, resulta evidente que o ataque aos argumentos dos filósofos defensores de concepções indivisibilistas constitui a substância mais representativa deste tratado, isto em termos de «área» ocupada no mesmo com vista à concretização daquele objectivo (o que o esquema supra citado tão bem ilustra). Abrindo este texto com a definição de contínuo e seguindo-se todo um conjunto de provas acerca de vários aspectos relativos às grandezas, Bradwardine encaminha depois a actividade dedutiva para a demonstração de que os contínuos não se compõem de indivisíveis, advindo então o espaço da crítica histórica.

Na sua veia crítica, esta obra abarca filósofos representantes dos dois grandes blocos temporais que Bradwardine poderia contemplar na prossecução do seu objectivo, a saber: a Antiguidade e a Idade Média. Na linha dos filósofos da Antiguidade, apresenta Demócrito, Pitágoras e Platão, atacando ainda personalidades

---

mathématiques. L'infini au XIV^e siècle, Les Belles Lettres, Paris 2005), «the deceptive writer» (R. PODKOŃSKI, «Thomas Bradwardine's Critique of Falsigraphus's Concept of Actual Infinity», cit.). O falsígrafo é aquele que não só refutaria ou falsificaria teses dadas como apresenta hipóteses que se revelam falsas. A palavra *falsigraphus* é abundantemente usada, sobretudo no contexto de discussões matemáticas e lógicas. No livro de W. KNORR, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin 1989, p. 611, n. 19, lê-se «The term *falsigraphus*, prominent in both *De curvis superficiebus* and 'Adelard III', can be traced to the Latin Aristotelian tradition of the 13th century, specifically to Robert Grosseteste». *Vide*, *v. g.*, M. CLAGETT (1954): (1) «The *De curvis superficiebus Archimenidis*: a Medieval Commentary of Johannes de Tinemue on Book I of the *De sphaera et cylindro* of Archimedes», p. 302, lin. 33 («*...quod mentiatur falsigraphus...*»); (2) «King Alfred and the *Elements* of Euclid», p. 274, lin. 49-50 («*…et cum falsigraphus insistit…*»). Cf. também W.R. KNORR, *Falsigraphus vs. adversarius. Robert Grosseteste, John of Tynemouth and Geometry in 13th-Century Oxford,* dans *Mathematische Probleme im Mittelalter: der lateinische und arabische Sprachbereich,* éd. M. FOLKERTS, Wiesbaden 1996, pp. 333-360.

mais próximas do seu tempo, a saber, Grosseteste, Harclay e Chatton (os dois últimos, seus contemporâneos)[59]. Segundo Bradwardine, estes são os autores indivisibilistas que ele tem de derrotar. Na ala oposta, isto é, na posição não-indivisibilista, Bradwardine colocava Aristóteles, Averróis, Algazel, e «muitos modernos». Para estes, os contínuos compunham-se de partes infinitamente divisíveis.

Bradwardine toma a geometria como a arma mais forte para a tarefa da revelação da verdade, apontando para o tratado euclídeo cinquenta vezes ao longo do *De continuo* (referências a trinta e cinco proposições diferentes). De todas as fontes mencionadas pelo autor no *Tractatus de continuo*, Euclides[60] e Aristóteles são nitidamente as de maior representatividade, pois quantificando o número de ocorrências de todas elas chega-se à seguinte conclusão: Aristóteles (19), o *De proportionibus* de Bradwardine (7), Arquimedes (2), Boécio (2), Teodósio de Tripoli (1), Averróis (1)[61].

As áreas do saber melhor representadas ao longo da série de absurdos que Bradwardine põe a descoberto como consequências da adopção do indivisibilismo são a geometria e a física. Outras ciências são, no entanto, também chamadas a confluir neste texto: na totalidade, temos no terreno do combate, doze ciências (a *duodenam legittimam*[62]). Para além da geometria e da filosofia natural ou física, Bradwardine convocou ainda, *ad demonstrandum*, a aritmética, a música, a óptica, a astronomia, a medicina, a metafísica, a gramática, a lógica, a retórica e a ética (aquando da crítica à existência de um número finito de indivisíveis nas quantidades contínuas). Temos então um tratado onde doze disciplinas são trabalhadas e concorrem associadamente em prol de um único objectivo. Como referimos, de

---

59 *Vide* Tomás Bradwardine, *De continuo*, *Conclusio* 31. Acerca da identificação de Roberto Grosseteste («*Lyncuf*» ou «*Lyncul*» de «*Lyncul[niensis]*»), Bispo de Lincoln em 1235, cfr. V. P. Zoubov, «Walter Catton, Gerard d'Odon et Nicolas Bonet», *Physis: rivista di storia della scienza*, 4, 1959, p. 266, n. 35. Quanto a Henrique de Harclay e Gualter Chatton, Bradwardine cita-os como *Henricus modernus* e *Waltherus modernus* (filósofos da Universidade de Oxford, seus contemporâneos).

60 Os *Elementos* de Euclides passaram para a cultura escolástica por meio de traduções que se fizeram a partir do árabe, daquela obra, durante o século XII. A primeira tradução latina dos *Elementos* é atribuída (o que não deixa de ser dúbio) a Adelardo de Bath, um famoso tradutor medieval. Bradwardine usa a versão de Campano de Novara dos *Elementos* (*vide Campanus of Novara and Euclid's Elements*, ed. H. L. L. Busard, Steiner, Stuttgart 2005), que constitui um comentário prestigioso daquela obra matemática.

61 Outros autores são referidos mas sem referência às suas obras, sendo estes: Demócrito, Pitágoras, Platão, Aristóxenes, Algazel, Roberto Grosseteste, Henrique de Harclay e Gualter Chatton.

62 *Vide* Tomás Bradwardine, *De continuo*, *Conclusio* 114.

todos os argumentos que Bradwardine apresenta, os de carácter geométrico são incontornáveis (o que não impede que a lista se possa estender seguindo aquelas vias complementares, uma vez que o atomismo é contrariado por outros ramos do saber – como quer demonstrar). Aliás, as conclusões retiradas nestes outros domínios do conhecimento derivam de princípios já discutidos anteriormente acerca do contínuo, no âmbito da geometria, e aceites. As diferentes hipóteses explicativas de uma estrutura indivisibilista das grandezas são reprovadas por meio de demonstrações (maioritariamente) matemáticas. Esta é marcadamente a natureza da refutação.